Examen - Convocatoria Extraordinaria

[**3 horas**]

- **No está permitido utilizar (ni acceder a) ningún tipo de documentación.**

1. Considera la siguiente cadena de Markov con espacio de estados $E = \{4, 6\}$ (*están ordenados según la representación de la matriz* $\mathbf{P}$), $X(n)$, y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/5 & 4/5 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

que empieza en el tiempo 0, con una distribución uniforme en los dos estados.

a) Dibuja il diagrama de transición, determina las clases de la cadena, caracteriza sus estados y determina sus periodos.

b) Calcula la distribución de $X(2)$ y la distribución límite de $X(\infty)$

c) Dada la función $h(x) = 1/x$, calcula los valores medio y las varianzas de $h(X(2))$ y de $h(X(\infty))$

d) Calcula la distribución de $\mathbb{E}[X(3)|X(2)]$

(2.5 Puntos)

2. Se considere el juego de un jugador que en cada jugada tiene probabilidad 20 % de ganar y 80 % de perder 2 monedas. Llamando S_n el número de monedas que el jugador tiene en el tiempo $n \geq 1$, se tiene que $S_n = 8 + \sum_{1\leq k\leq n} X_k$, con X_k la cuantía ganada o, bien, perdida en la jugada $k > 0$. El juego se acaba cuando el jugador se queda sin monedas o cuando llegue a tener 10 monedas:

a) Muestra que el proceso $W_n = 2^{S_n}$ es una martingala.

b) Define el tiempo de parada T que indica el momento en el que se acaba el juego en función del proceso W_n y también del proceso S_n.

c) Calcula la función de probabilidad de S_T

d) Calcula la varianza de S_T.

(2.5 Puntos)

3. Considera la cadena de Markov en tiempo continuo, $X(t)$, con espacio de estados $E = \{1, 2, 3\}$, generador $\mathbf{Q}$ y matriz de transición de la cadena incrustada $\mathbf{\Pi}$ dados por

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \star & 5 & 2 \\ \star & -10 & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix} , \qquad \mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 80.00\,\% & \star & \star \\ \star & \star & 100\,\% \end{pmatrix} .$$

a) Escribe la forma completa del generador de la cadena, de la matriz de transición de la cadena incrustada y dibuja el diagrama de transición. Caracteriza los estados.

b) Calcula la distribución de $X(1)$.

c) Calcula los tiempos medios que la cadena pasa en los estados $\{1, 2\}$ antes de tocar el estado 3.

(2.5 Puntos)

4. Dado el proceso $Z(t)$ definido como

$$Z(t) = t\,B(t) - 2\,t^2\,B(1)$$

calcula,

a) La función media $\mu(t) = \mathbb{E}[Z(t)]$

b) La función covarianza $C(s, t) = \mathbb{C}\text{ov}[Z(s), Z(t)]$

c) La distribución de $Z(t)$. Es el proceso Gaussiano?

(2.5 Puntos)